Funktionen und ihre Eigen-schaften

Lineare Abbildungen (Funktionen)

Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare Abbildungen (Funktionen)

Warum befassen wir uns exklusiv mit linearen Abbildungen?

Wenn wir feststellen, dass wir ein lineare Problem vor uns haben, wird die Lösung einfacher…

Warum?

Die lineare Welt…

Die nichtlineare Welt…



Häufig können nichtlineare Probleme Linearisiert werden…

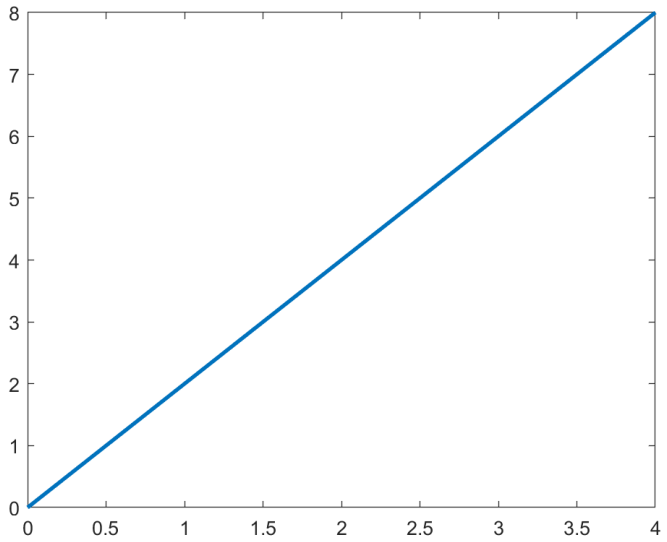
Funktionen und ihre Eigenschaften

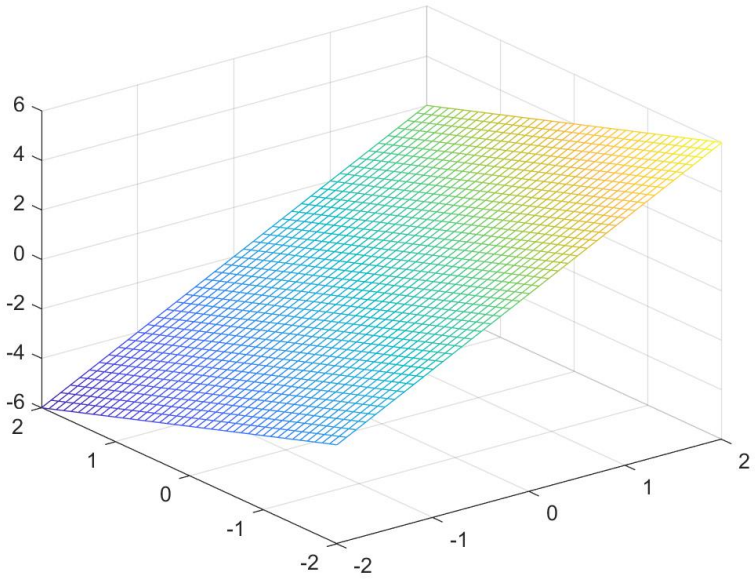
Lineare Abbildungen (Funktionen)

Definition: Lineare Abbildungen

Lineare Problemstellungen werden durch lineare Abbildungen beschrieben…

Wie sehen diese aus?





Genauer: Ursprungsgeraden und Ursprungsebenen!

Lineare Abbildungen (Funktionen)

Definition: Lineare Abbildungen

Warum Ursprungsgeraden?

Bei linearem Verhalten gilt:

Doppelter x-Wert bedeutet doppelter y-Wert

Betrachte eine allgemeine Gerade:

$$y = m \cdot x + b \quad \Rightarrow \quad 2y \neq m \cdot 2x + b$$

Bei Ursprungsgeraden gilt aber:

$$y = m \cdot x \quad \Rightarrow \quad 2y = m \cdot 2x$$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare Abbildungen (Funktionen)

Definition: Lineare Abbildungen

Wir haben eine Bedingung gefunden, die lineare Abbildungen (Funktionen) erfüllen müssen:

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$$

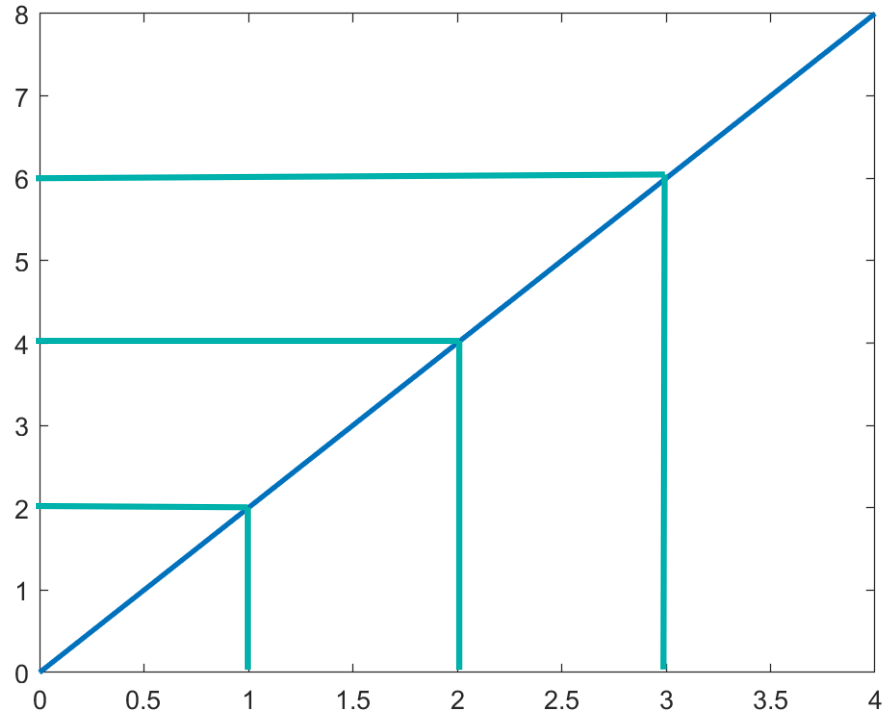
Bzw. für Skalar- und Vektorfelder:

$$f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

Lineare Abbildungen (Funktionen)

Definition: Lineare Abbildungen

Es gibt eine weitere Eigenschaft, die lineare Funktionen erfüllen müssen…



$$f(1) + f(2) = \; f(1+2) = f(3)$$

Es gilt allgemein:

$$f(x) + f(y) = f(x+y)$$

$$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\vec{x} + \vec{y})$$

$$\vec{F}(\vec{x}) + \vec{F}(\vec{y}) = \vec{F}(\vec{x} + \vec{y})$$

Lineare Abbildungen (Funktionen)

Nachweis, dass eine Abbildung linear ist…

Wir betrachten ein Beispiel: $f(x) = 3 \cdot x$

Zu zeigen: $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

$$f(\lambda \cdot x) = 3 \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \underbrace{(3 \cdot x)}_{= f(x)} = \lambda \cdot f(x)$$

Zu zeigen: $f(x + y) = f(x) + f(y)$

$$f(x + y) = 3 \cdot (x + y) = \underbrace{3x + 3y}_{= f(x)} = f(x) + f(y)$$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare Abbildungen (Funktionen)

Nachweis, dass eine Abbildung linear ist…

Das ist insbesondere bei Vektorfeldern sehr aufwändig…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

Wir rechnen die erste Bedingung nach:

$$\vec{F}(\lambda \cdot \vec{x}) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 - \lambda \cdot x_2 \\ 2\lambda \cdot x_2 \\ \lambda \cdot x_1 + 2\lambda \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot (x_1 - x_2) \\ \lambda \cdot (2x_2) \\ \lambda \cdot (x_1 + 2x_2) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

Lineare Abbildungen (Funktionen)

Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen…

Aus mathematischer Sicht sind lineare Abbildungen und Matrizen das gleiche…

Das bedeutet:

Jede lineare Abbildung $\vec{F}(\vec{x})$ kann als Matrixmultiplikation geschrieben werden.

Jede Matrixmultiplikation $A \cdot \vec{x}$ definiert eine lineare Abbildung.



Wie erhalte ich die Matrix?

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare Abbildungen (Funktionen)

Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen…

Wir betrachten das Beispiel…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

Die Abbildung $\vec{F}$ bildet den Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ ab auf einen Vektor $\vec{F}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3$

Wir betrachten die Bilder der Standardbasis:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare Abbildungen (Funktionen)

Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen…

Wir betrachten ein weiteres Beispiel…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \cdot x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_1 - 3x_3 \end{pmatrix}$$

Wir bilden vom $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}^2$ ab…

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare Abbildungen (Funktionen)

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Die Abbildung unten ist linear. Stellen Sie die Abbildungsmatrix auf…

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (2x_1 + x_2 - x_3\,,\; x_1 + 2x_3\,,\; -x_2 + 4x_3\,,\; x_1 + x_2 + x_3)^T$$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare Abbildungen (Funktionen)

Indizien für nichtlineare Abbildungen…

Wir schauen uns ein paar Beispiele an…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \cdot x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_1^2 - 3x_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2 + 1 \\ 2x_1 - 3x_3 \end{pmatrix}$$

Nützliche Folgerung:

Falls $\vec{F}\left(\vec{0}\right) \neq \vec{0}$ gilt, ist die Abbildung nicht linear!

Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare Abbildungen - Anwendungen

Wo liegt bei praktischen Anwendungen Linearität vor?

Wir betrachten ein paar Beispiele aus der Physik…

Ohm‘sches Gesetz:

$$R = \frac{U}{I} \quad \Rightarrow \quad U(I) = R \cdot I$$

Nachweis…

$$U(I_1 + I_2) = R \cdot (I_1 + I_2) = R \cdot I_1 + R \cdot I_2 = U(I_1) + U(I_2)$$

$$U(\lambda \cdot I) = R \cdot (\lambda \cdot I) = \lambda \cdot (R \cdot I) = \lambda \cdot U(I)$$

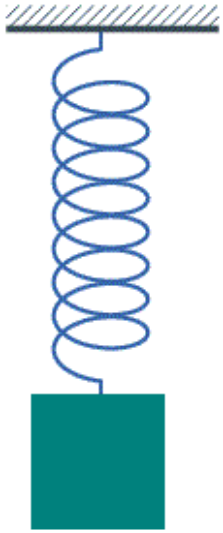
Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare Abbildungen - Anwendungen

Wo liegt bei praktischen Anwendungen Linearität vor?

Wir betrachten ein paar Beispiele aus der Physik…

Hooke'sches Gesetz:



Der Zusammenhang zwischen Auslenkung der Feder und der dazu benötigten Kraft ist linear!

$$F(x) = D \cdot x$$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare Abbildungen - Anwendungen

Wo liegt bei praktischen Anwendungen Linearität vor?

Oft ist es auch nützlich Beispiele für nichtlineare Zusammenhänge zu kennen…

Kinetische Energie…

Die kinetische Energie hängt quadratisch von der Geschwindigkeit ab…

$$E_{kin}(v) = \frac{1}{2}mv^2$$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare Abbildungen - Anwendungen

Wo liegt bei praktischen Anwendungen Linearität vor?

In den Wirtschaftswissenschaften werden lineare Optimierungsprobleme betrachtet…

Produktionsplanung:

Es werden zwei Produkte A und B hergestellt. Produkt A bringt 300 Euro pro Mengeneinheit und Produkt B 500 Euro.

Zur Herstellung werden drei Maschinen verwendet, die aaximale Laufzeiten von 170, 150 und 180 Stunden haben.

Produkt A benötigt jeweils eine Stunde auf Maschine 1 und 2.
Produkt B benötigt zwei Stunden Maschine 1, eine Stunde Maschine 2 und drei Stunden Maschine 3.

Zielfunktion:

$$G(x_1, x_2) = 300x_1 + 500x_2$$

Nebenbedingungen:

$$x_1 + 2x_2 \leq 170$$
$$x_1 + x_2 \leq 150$$
$$3x_2 \leq 180$$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare Abbildungen - Anwendungen

Wo liegt bei praktischen Anwendungen Linearität vor?

In den Wirtschaftswissenschaften werden lineare Optimierungsprobleme betrachtet…

Produktionsplanung:

Zielfunktion:

$$G(x_1, x_2) = 300x_1 + 500x_2$$

Nebenbedingungen:

$$x_1 + 2x_2 \leq 170$$
$$x_1 + x_2 \leq 150$$
$$3x_2 \leq 180$$

Die Nebenbedingungen können auch mit Hilfe einer Matrix geschrieben werden…

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 170 \\ 150 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Funktionen und ihre Eigenschaften

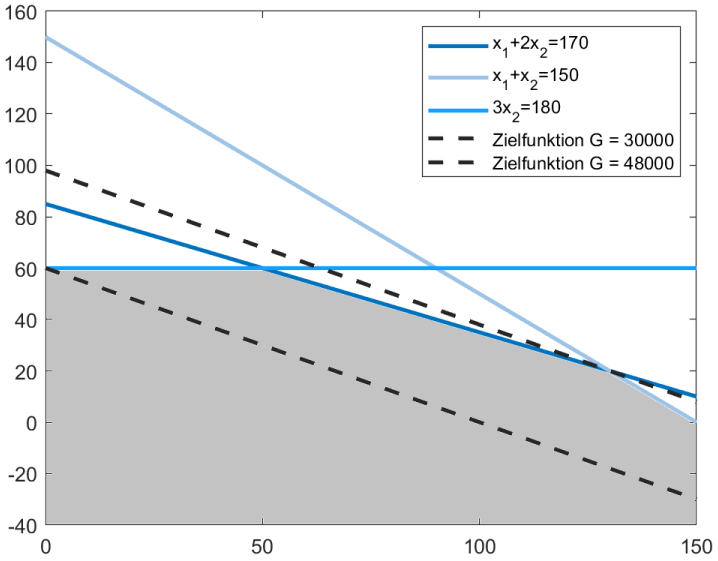
Lineare Abbildungen - Anwendungen

Wo liegt bei praktischen Anwendungen Linearität vor?

In den Wirtschaftswissenschaften werden lineare Optimierungsprobleme betrachtet…

Produktionsplanung:

Das Problem kann grafisch gelöst werden…



$$x_1 + 2x_2 \leq 170$$
$$x_1 + x_2 \leq 150$$
$$3x_2 \leq 180$$

$$G(x_1, x_2) = 300x_1 + 500x_2$$

Funktionen und ihre Eigenschaften

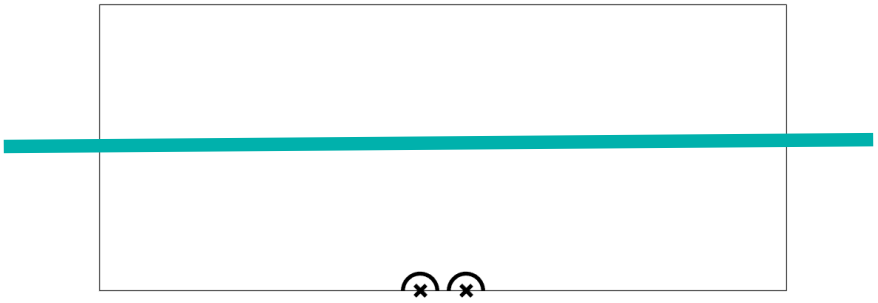
Lineare Abbildungen - Anwendungen

Wo liegt bei praktischen Anwendungen Linearität vor?

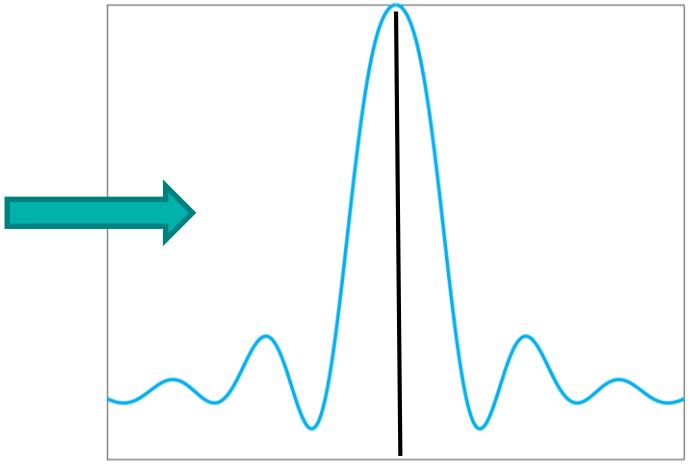
Wir betrachten die zweite Bedingung für Linearität…

$$\vec{F}(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{F}(\vec{x}) + \vec{F}(\vec{y})$$

In der Physik wird hier oft vom Superpositionsprinzip gesprochen…



Wellenbeugung am Doppelspalt



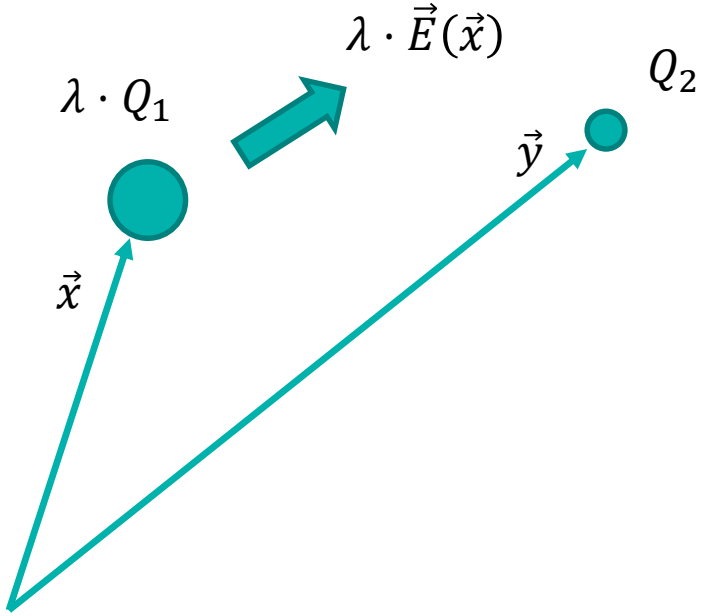
Beugungsbild am Schirm

Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare Abbildungen - Anwendungen

Wo liegt bei praktischen Anwendungen Linearität vor?

Wir betrachten das elektrische Feld, dass von zwei Ladungen erzeugt wird…



Gesucht:

Gemeinsames elektrisches Feld der beiden Ladungen…

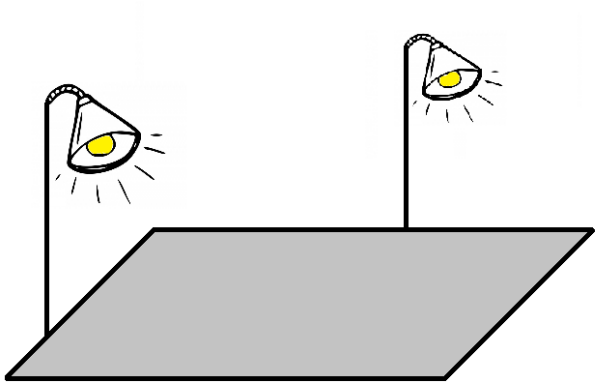
$$\vec{E}(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{E}(\vec{x}) + \vec{E}(\vec{y})$$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare Abbildungen - Anwendungen

Anwendungsbeispiel: Erwärmung einer Platte

Eine Metallplatte wird von zwei Strahlern erwärmt. Wir betrachten die Temperatur-verteilung nach einer gewissen Zeit.



Freie Parameter:

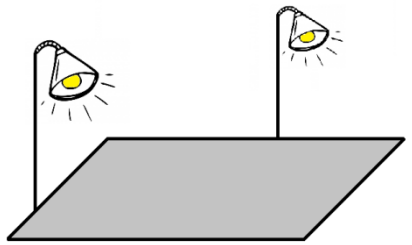
Die Leistung der Lampen in Watt kann verändert werden.

Zwei Parameter: $\dot{Q}_1$ und $\dot{Q}_2$, bzw. als Vektor: $\dot{Q} = \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{pmatrix}$

Funktionen und ihre Eigenschaften

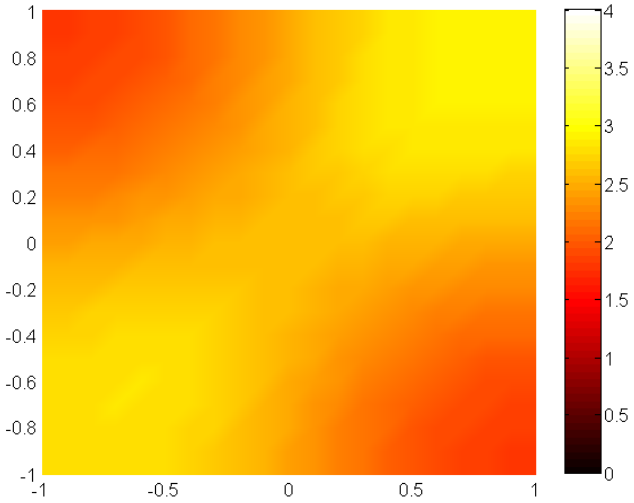
Lineare Abbildungen - Anwendungen

Anwendungsbeispiel: Erwärmung einer Platte

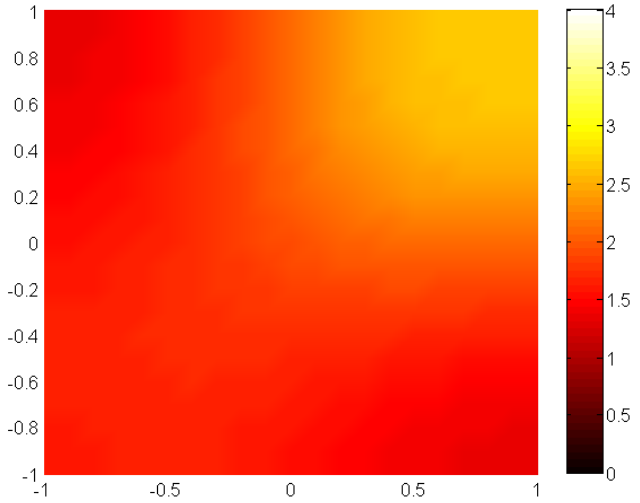


Simulationsergebnis…

Rechenzeit: 4-5 Sekunden



$$\dot{Q} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

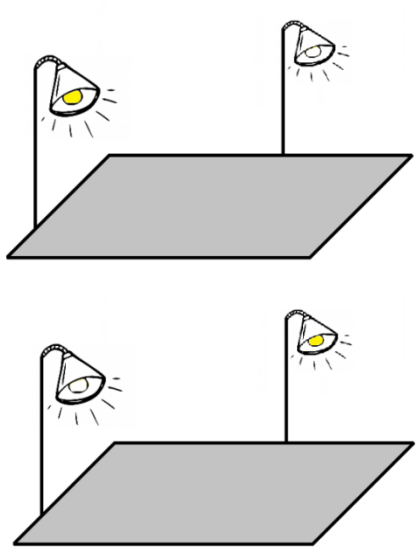


$$\dot{Q} = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare Abbildungen - Anwendungen

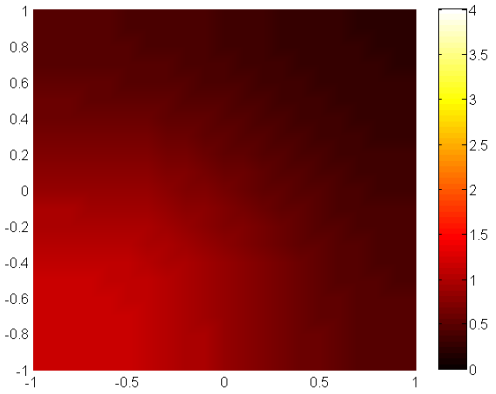
Anwendungsbeispiel: Erwärmung einer Platte



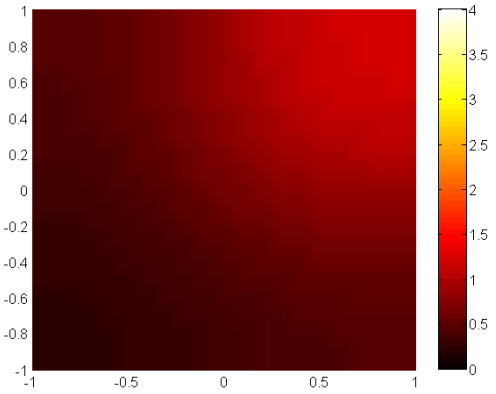
Wir nutzen aus, dass der Prozess linear bzgl. der Lampenleistungen Q_1 und Q_2 ist…

$$T_1 \text{ für } \dot{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T_2 \text{ für } \dot{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \lambda \cdot T_1 + \mu \cdot T_2 \quad \text{für allgemeines } \dot{Q} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$



T_1

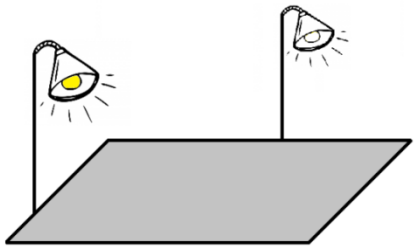


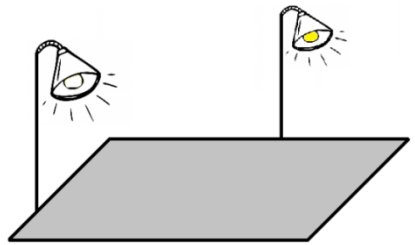
T_2

Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare Abbildungen - Anwendungen

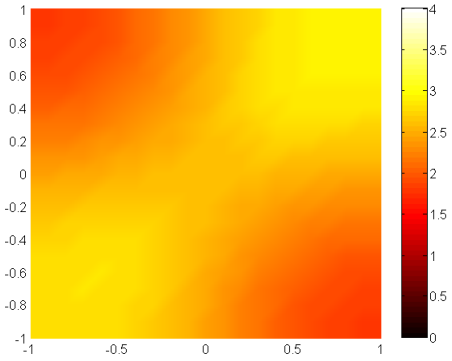
Anwendungsbeispiel: Erwärmung einer Platte

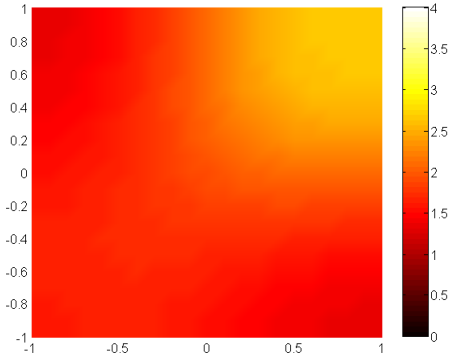




Vergleich volle Simulation und Ausnutzen der Linearität…

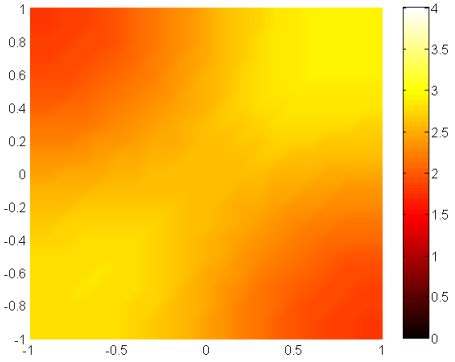
Simulation

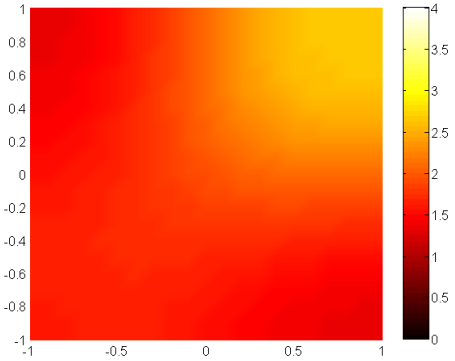




4-5 Sek

Überlagerung





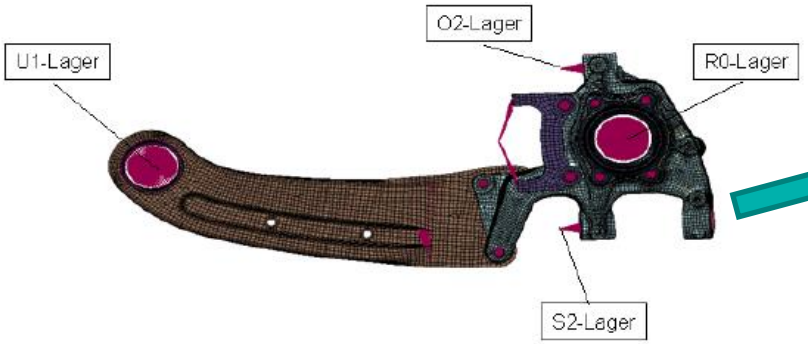
10^{-5} Sek

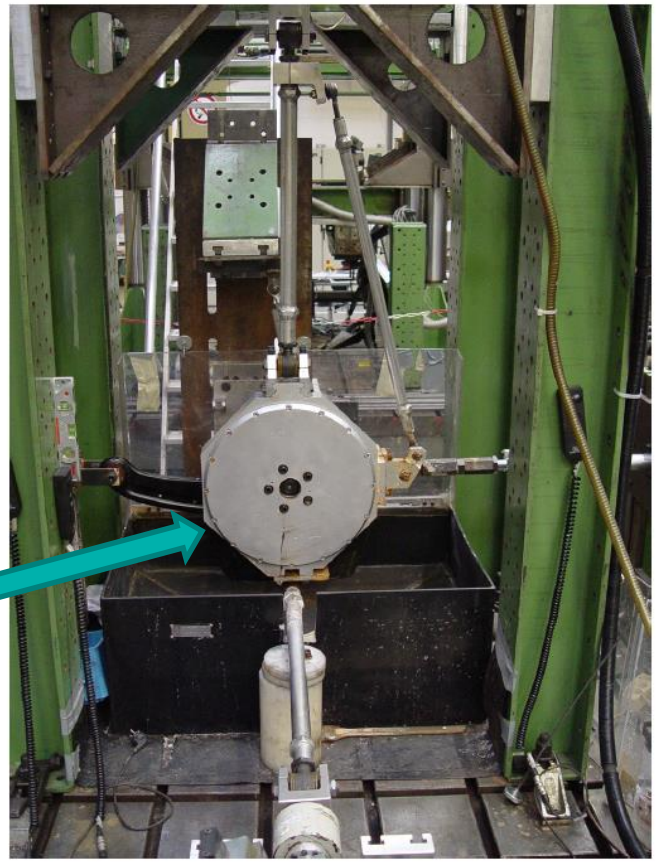
Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare Abbildungen - Anwendungen

Anwendungsbeispiel: Prüfstandoptimierung

Wie muss ein möglichst einfacher Prüfstand aufgebaut sein und welche Lasten muss ich anlegen um vor-gegebene Spannungen zu erhalten?





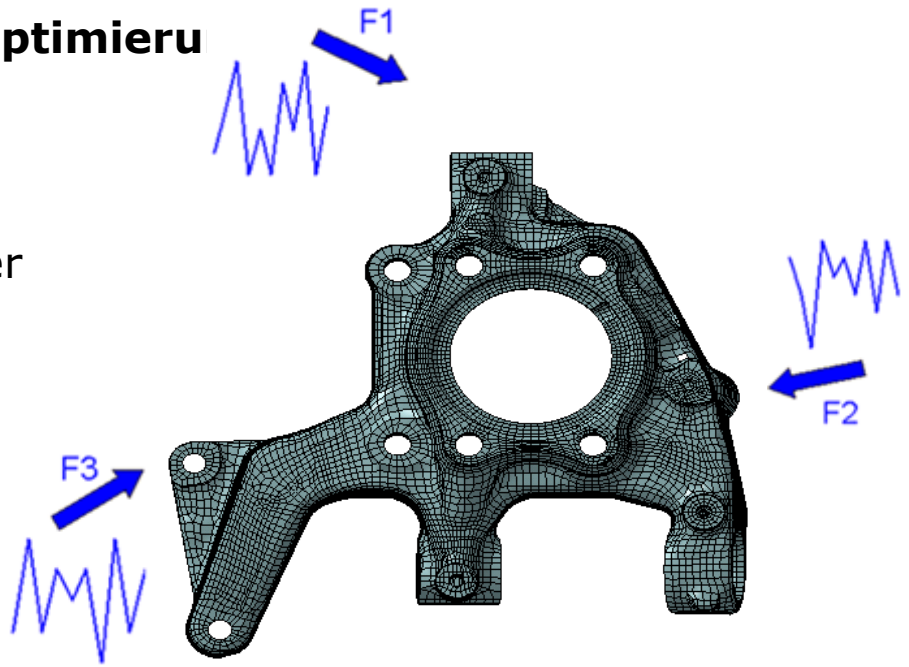
Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare Abbildungen - Anwendungen

Anwendungsbeispiel: Prüfstandoptimieru

Es gilt:

Der Zusammenhang von angelegter Last und Spannung im Bauteil ist linear (wenn keine Schwingungen auftreten, wie z.B. bei Achsen).



Achsschenkelgelenk

Idee:

Berechne Spannungen für Einheitslastfälle (Spezielle Vektoren).

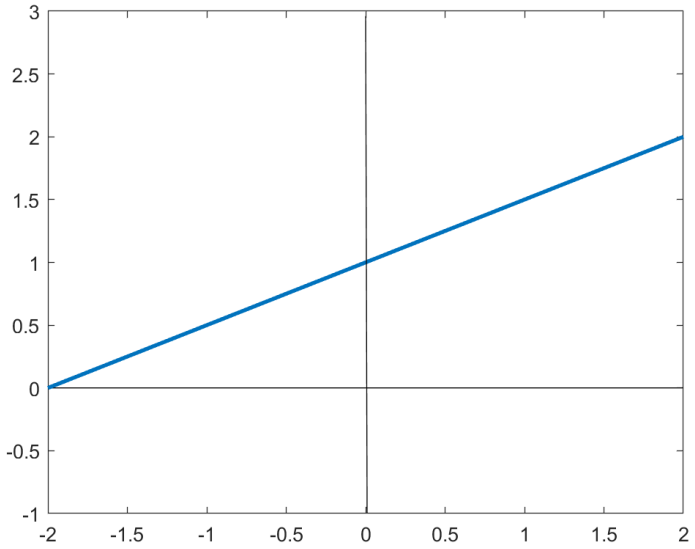
Stelle mit diesen Ergebnissen eine Matrix auf, mit deren Hilfe dann beliebige Lastfälle schneller berechnet werden können.

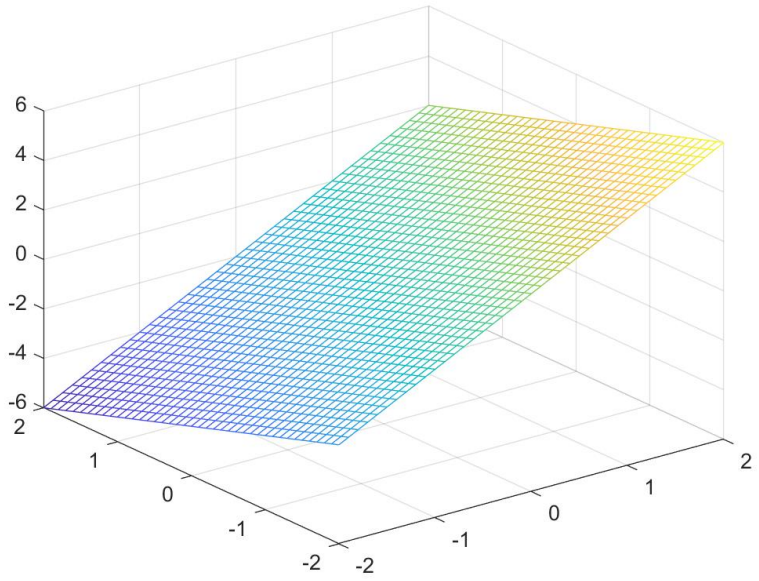
Funktionen und ihre Eigenschaften

Affin lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen…

Geometrisch gesehen sind Urspungsgeraden und Ursprungsebenen die linearen Abbildungen…





Funktionen und ihre Eigenschaften

Affin lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen…

Verschobene Geraden und Ebenen sind keine linearen Abbildungen, obwohl sie doch „ähnlich" aussehen und nur verschoben sind…

Grund:

Sie erfüllen nicht die beiden Bedingungen für lineare Abbildungen:

$$\vec{F}(\lambda\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{F}(\vec{x})$$

$$\vec{F}(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{F}(\vec{x}) + \vec{F}(\vec{y})$$

Oder noch einfacher…

Für verschobene Geraden und Ebenen gilt nicht: $\vec{F}\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$



$\vec{F}(\vec{0})$ ist gerade die Verschiebung…

Funktionen und ihre Eigenschaften

Affin lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen…

Beispiel: $f(x) = m \cdot x + b$  $f(0) = b$

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + 1 \\ x_2 + 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}\left(\vec{0}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solche verschobenen linearen Abbildungen werden als affin lineare Abbildungen bezeichnet.

Hinweis:

Die exakte Definition von affin linearen Abbildungen umfasst mehr als nur die verschobenen, lineare Abbildungen. Aber für unsere Zwecke genügt dieser Vorstellung.

Funktionen und ihre Eigenschaften

Affin lineare Abbildungen

Affin lineare Abbildungen und Matrizen…

Wir betrachten noch einmal die folgende affin lineare Abbildung…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + 1 \\ x_2 + 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$$

Wir können diese <u>nicht</u> durch eine Matrix darstellen…

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F}(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Affin lineare Abbildungen

Affin lineare Abbildungen und Matrizen…

Wir können aber die Abbildung umformulieren…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + 1 \\ x_2 + 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{Lineare Abbildung}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir können die affin lineare Abbildung wie folgt darstellen…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + 1 \\ x_2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} + \vec{b}$$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Affin lineare Abbildungen

Jetzt sind Sie an der Reihe...

Entscheiden Sie welche der folgenden Abbildungen linear, affin linear oder nichts von beidem sind…

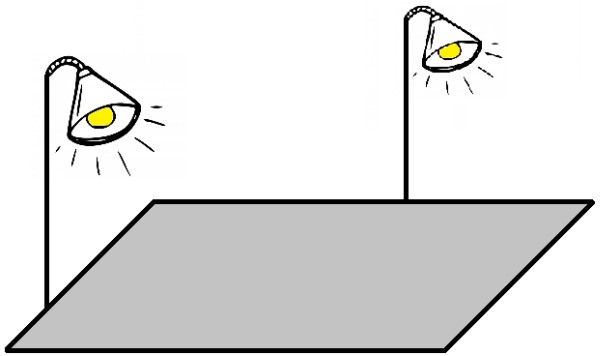
$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 + 1 \\ x_2 - 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Affin lineare Abbildungen

Anwendungsbeispiele…



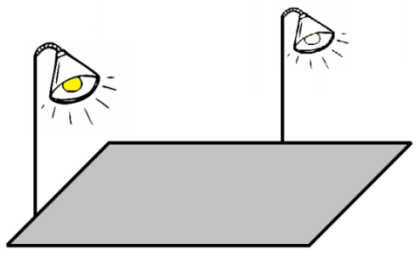
Wir erwärmen eine Metallplatte mit Hilfe von zwei Lampen.

Die Temperatur hängt linear von der Lampenleistung $\dot{Q} = \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{pmatrix}$…

… wenn die Anfangstemperatur null ist.

→ Wir können das Problem durch eine Matrix beschreiben

→ $T = A \cdot \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{pmatrix}$



$\dot{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

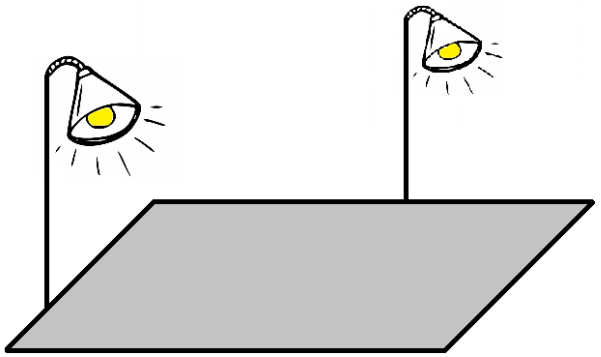
↓

T_1

Funktionen und ihre Eigenschaften

Affin lineare Abbildungen

Anwendungsbeispiele…



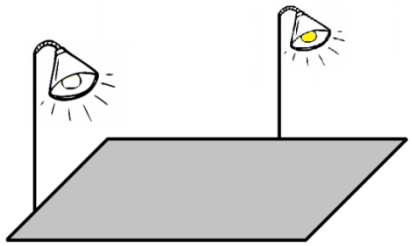
Wir erwärmen eine Metallplatte mit Hilfe von zwei Lampen.

Die Temperatur hängt linear von der Lampenleistung $\dot{Q} = \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{pmatrix}$…

… wenn die Anfangstemperatur null ist.

→ Wir können das Problem durch eine Matrix beschreiben

→ $T = A \cdot \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{pmatrix}$



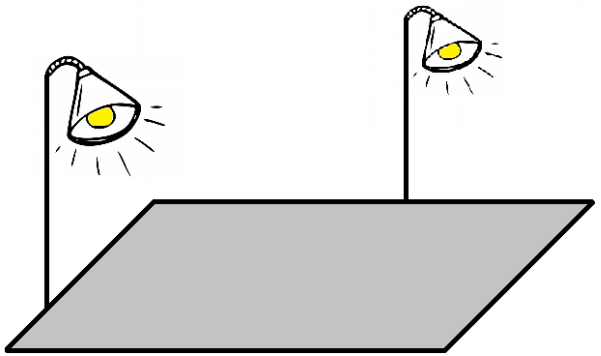
$\dot{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

↓

T_2

Funktionen und ihre Eigenschaften

Affin lineare Abbildungen



Anwendungsbeispiele…

Was machen wir, wenn die Anfangs-temperatur der Platte ungleich null ist?

Wir bezeichnen die Anfangstemperatur als T_0.

Die Temperaturerhöhung durch die Lampen ist unabhängig von der Anfangstemperatur. Wir können diese einfach addieren.

➡ Das Problem ist affin linear

➡ $$T = A \cdot \begin{pmatrix} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{pmatrix} + T_0$$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Affin lineare Abbildungen

Anwendungsbeispiele…

Wir betrachten ein lineares Optimierungsproblem…

Zielfunktion: $F(\vec{x}) = \vec{c}^T \cdot \vec{x} = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \cdots c_n \cdot x_n$

Nebenbedingungen: $A \cdot \vec{x} \leq \vec{b}$ ⇒ $\underbrace{A \cdot \vec{x} - \vec{b}}_{\text{Affin lineare Abbildung}} \leq \vec{0}$

Solche affin linearen Nebenbedingungen treten nicht nur bei linearen Optimierungsproblemen auf, wo die Zielfunktion linear ist.

Konvexe Optimierungsprobleme bilden eine wichtige Klasse von Optimierungsproblemen. Hier dürfen die Gleichungsnebenbedingungen nur affin linear sein:

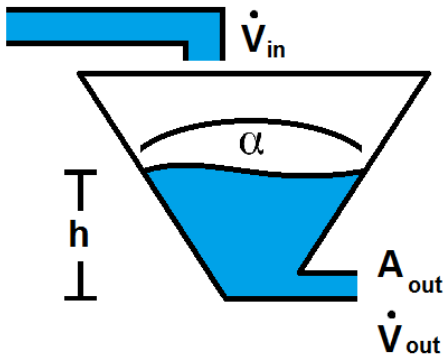
$$A \cdot \vec{x} - \vec{b} = \vec{0}$$

Funktionen und ihre Eigenschaften

Affin lineare Abbildungen

Anwendungsbeispiele…

Wir betrachten ein Füllstandsproblem in der Regelungstechnik…



Ziel:

Die Füllstandshöhe soll bei h_0 gehalten werden.

Interessant für die Einstellung des Reglers ist eigentlich nicht der absolute Wert $h(t)$, sondern nur die Differenz zum Sollwert…

$$\Delta h = h(t) - h_0 \quad \Rightarrow \quad h(t) = \Delta h + h_0$$

Affin lineare Abbildungen

Jetzt sind Sie an der Reihe…

Geben Sie die folgende affin lineare Abbildung in Matrix-Vektor-Form an…

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 + 1 \\ x_2 - 5 \end{pmatrix}$$